Cours BASES ET DIMENSIONS

1 Familles libres, bases et dimensions

Familles libres et familles liées

Colinéarité, coplanarité

Quelques rappels du lycée

Colinéarité

Deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan ou de l'espace sont dits **colinéaire** lorsqu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Coplanarité

Trois vecteurs **non nuls** $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires sont dits **coplanaire** si il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$$

En fait des vecteurs sont colinéaires/coplanaires lorsque chacun des vecteurs peut s'écrire en fonction des autres.

- Deux vecteurs non colinéaires forment une **base** de $\mathbb{R}^2$ notée $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Trois vecteurs non coplanaires forment une **base** de $\mathbb{R}^3$ notée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Remarque

Une base est constituée de vecteurs qui ne sont pas « liés » entre eux que se soit sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^3$. En réalité, cette notion se généralise sur tout $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels.

Famille liée

Soit $F = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que F est une **famille liée**, ou que les vecteurs de $u_1, \ldots, u_k$ sont linéairement dépendants, si $\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ non-tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0_{\mathbb{K}^n}$$

L'expression non tous nuls signifie $\exists i \in [\![1;k]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.

Exemple

$F = ((0,1),(1,1),(1,0))$
Est une famille liée car $(1,1) = (0,1) + (1,0)$

Remarque

Une famille est lié dès lors que l'on arrive a trouver un vecteur de cette dernière qui s'écrit en fonction des autres.

Exemple

L'exemple le plus simple de base sont les **bases cannoniques**.

$$\mathcal{E}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par soucis de notation j'ai décidé de noter $\mathcal{E}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Famille libre

Soit $F = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que F est **libre** ou que les vecteurs sont linéairement indépendants si F n'est pas liée.
On note :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Autrement dit, si **aucun vecteur ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres** alors F est libre.

Exemple

On considère la famille suivante :

$$\mathcal{E}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Il faut que l'on montre que $\mathcal{E}_3$ est une famille libre de pour se faire il faut montrer que la somme des $\lambda_i u_i$ donne le vecteur nul, i.e. que tous les λ_i soient nuls.

» Étape 1 – Poser la somme

La famille est composée de trois vecteurs alors on pose $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

» Étape 2 – Construire le système d'équation

On obtient alors un système à trois lignes :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & L_1 \\ \lambda_2 = 0 & L_2 \\ \lambda_3 = 0 & L_3 \end{cases} \tag{1}$$

» Étape 3 – Résoudre le système d'équations et conclure

D'après le système, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alors $\mathcal{E}_3$ est une famille libre.

Bases et dimensions

Base d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de F, où $k \in \mathbb{N}^*$ est une **base** de F si :

- $\mathcal{F}$ est une famille libre
- $\mathcal{F}$ engendre F, c'est à dire $Vect(u_1, \dots, u_k) = F$

Il faut donc maîtriser les méthodes pour prouver un sous-espace vectoriel et sa notation $Vect(\dots)$.

Propriété

Admission d'une base

Tout sous espace vectoriel $F \in \mathbb{K}^n$ tel que $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ admet une base.

Dimension

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ une base de $k \in \mathbb{N}^*$ éléments de F. On appelle **dimension** de F notée $dim(F)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$.

On note :

$$dim(F) = k$$

Par convention, si $F = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, alors $dim(F) = 0$.

En gros, la dimension c'est le nombre d'éléments dans la base.